View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk

brought to you by CORE

provided by Firenze University Press: E-Journals

Il Colle di Galileo

Franco Bagnoli

La cartolina di Didone

Dido's postcard

Dipartimento di Fisica e Centro Interdipartimentale per lo Studio di Dinamiche Complesse (CSDC), Università di Firenze, Via G. Sansone 1 50019 Sesto Fiorentino (Fi)
Affiliato a INFN Sez. Firenze e al CNR - Istituto dei Sistemi Complessi

Riassunto. Didone ha risolto il primo problema isoperimetrico della storia, tagliando una pelle di bue in strisce, legandole e circodando con la corda ottenuta la porzione di terra dove voleva costruire Cartagine. Tuttavia, il suo exploit può essere migliorato, e si può mostrare come fare aprendo un taglio in una cartolina in modo tale che una persona sia in grado di passarvi attraverso.

Parole chiave. Problema isoperimetrico, nodi.

Il problema di Didone è un classico della matematica [Kelvin 1894], e anche della letteratura e della storia, dato che secondo Virgilio [19 a.c.] Didone si uccide dopo essere stata abbandonata da Enea e a tale fatto si fa risalire la contrapposizione tra romani e cartaginesi.

La principessa fenicia Didone fuggì con alcuni fedelissimi dalla città natale di Tiro dopo aver scoperto che il re Pigmalione (suo fratello, niente a che fare con lo scultore greco dallo stesso nome) aveva assassinato suo marito. Dopo un lungo viaggio approdò sulle coste dell'Africa settentrionale (in Libia). Qui incontrò il re Iarba per l'acquisto di un appezzamento di terra su cui costruire una nuova città: egli, per tutta risposta, le diede una pelle di toro e le disse che poteva prendere tanto terreno

Abstract. Dido solved the first isoperimetric problem in history by cutting an oxhide into strips, tying them together and surrounding with the resulting rope the portion of land where Carthage was to be built. However, Dido's feat can be improved on, as can be shown by cutting an opening in a postcard in such a way that a person is able to pass through it.

Keywords. isoperimetric problem, knots.

The Dido problem is a classic of mathematics [Kelvin 1894], and even of literature and history, given that according to Virgil [19 BC] Dido committed suicide after being abandoned by Aeneas and the conflict between the Romans and the Carthaginians can be traced back to that event.

The Phoenician Princess Dido fled from her native city of Tyre after discovering that the king Pygmalion (her brother, nothing to do with the Greek sculptor of the same name) had murdered her husband. After a long journey, she landed on the northern coast of Africa

© 2017 Firenze University Press
ISSN 2281-7727 (print)
ISSN 2281-9711 (online)

Vol. 6, 1, 2017, pp. 53-59
DOI: 10.13128/Colle_Galileo-20563
www.fupress.com/cdg

quanto tale pelle potesse racchiuderne. Virgilio non descrive come Didone risolse il problema della pelle di toro; tuttavia la tradizione tramanda che la principessa, senza perdersi d'animo, escogitò un astuto stratagemma per accaparrarsi un terreno quanto più vasto fosse possibile. Didone ordinò che la pelle fosse tagliata in listarelle sottili, che fossero poi legate insieme ai capi per formare una lunga corda (Figura 1). Con tale corda, la principessa circondò una collina (su cui costruire la rocca), posando gli estremi della corda in mare. Si dice inoltre che Didone fece disporre la corda a forma di semicerchio in modo da racchiudere la maggior area possibile.

Il problema di Didone in matematica è quello di trovare la figura che ha area maggiore dato il suo perimetro, sia in un piano (la soluzione è un cerchio) che su un semipiano (un semicerchio).

Per quanto il problema possa sembrare banale, richiede qualche conoscenza di calcolo delle variazioni [Magnani 2008] e quindi racchiude una certa complessità tecnica.

Esaminiamo adesso il problema con gli occhi di un fisico. Per prima cosa possiamo dire che la maniera migliore per accaparrarsi più terra possibile con un dato perimetro (la corda ricavata dalla pelle) senza però contare la costa, è quella… di trovare una penisola separata da un istmo di larghezza uguale alla corda a disposizione. Così non c'è limite alla terra ottenibile. Inoltre, non abitiamo su un piano ma sulla Terra, che è assimilabile ad una sfera. Se tracciamo una curva chiusa su una sfera, non è chiaro cosa sia il "dentro" e cosa il "fuori". Didone avrebbe potuto richiedere a Iarba tutta la Terra tranne il pezzetto circondato dalla sua corda! Probabilmente però non l'avrebbe ottenuta…

Figura 1. Didone acquista la terra per la fondazione di Cartagine. Incisione di Matthaeus Merian il Vecchio (1630).

Figure 1. Dido Purchases Land for the Foundation of Carthage. Engraving by Matthaeus Merian the Elder (1630).

Franco Bagnoli

L'altro elemento su cui nessuno si sofferma è: quanto può essere lunga una corda ottenuta da una pelle di bue?

Dato che vigono le leggi della fisica, al massimo la corda può essere fatta con una catena polimerica, tipo un idrocarburo o, anche, un filamento di DNA o un microtubolo proteico o un nanotubo di carbonio. Ma dubito che la tecnologia di 3000 anni fa fosse in grado di trasformare in tal modo una pelle di bisonte, senza contare che questi filamenti sono invisibili e estremamente fragili, non credo che Iarba ci sarebbe cascato.

Diciamo quindi che si deve tagliare la pelle di bisonte senza trasformarla. Per semplificare diciamo che la pelle copre 1 metro quadro (saranno anche tre o quattro, ma cambia solo un fattore), che è perfettamente bidimensionale (anche se invece ha un certo spessore) e che può essere tagliata al massimo in filamenti spessi 1 millimetro (impresa non banalissima). Si ottengono quindi 1000 metri di filo, che però va ancora annodato (1000 nodi!).

Utilizzando i semplici nodi piani [Stolarsky 2013] (Figura 2), ho stimato che ogni nodo "consuma" un pezzo di filo lungo più o meno 10 volte il suo diametro. Quindi si perdono 10 metri di filo, che non è in molto, ma teniamo conto che con 1000 metri di corda si cinge solo un cerchio di circa 160 metri di raggio.

Si possono risparmiare i nodi? Sì, basta tagliare bene la pelle di bisonte. Per dimostrarlo in maniera pratica, sfidiamo gli amici a passare attraverso una porta disegnata su un piccolo foglio di carta (Figura 3).

Disegniamo su un 1/4 di foglio A4 una porta a due battenti, e tagliamo lungo le linee tratteggiate. Conviene piegare il foglio in due, e tagliare lungo le linee

(Libya). There she met the King Iarbas and asked him to purchase a plot of land on which to build a new city. The king, in response, told her that she could take as much land as could be enclosed in an oxhide.

Virgil did not describe how Dido solved the problem, but tradition holds that the princess devised a cunning ploy to acquire as much land as possible. She ordered that the skin be cut into thin strips, which were then tied together in a long rope (Figure 1). With it, the princess surrounded a hill (on which to build a fortress), placing the ends of the rope in the sea. It also said that Dido arranged the rope in the shape of a semicircle so as to enclose the maximum possible area.

In Mathematics, what is known as "Dido's problem" is to find the figure that has the greatest surface area given its perimeter. The solution in a plane is a circle, and a semicircle in a half-plane.

Although the problem may seem trivial, it requires some knowledge of the calculus of variations [Magnani 2008] and hence a degree of technical complexity.

We will now examine the problem through the eyes of a physicist. First, we can say that the best way to get as much land as possible with a given perimeter (the rope made from the skin) without counting the costs, is... to find a peninsula separated by an isthmus whose minimum width is equal to the length of the available rope. In this way there is no limit to the land obtainable. Moreover, we do not live on a plane but on Earth, which is similar to a sphere. If we draw a closed curve on a sphere, it is not clear which is the "inside" and which is the "out-

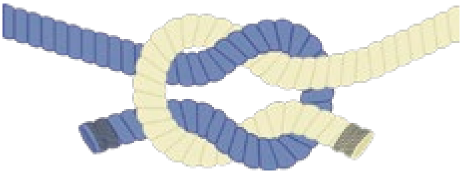

Figura 2. Un nodo piano. Immagine da Wikipedia [Stolarsky 2013].

Figure 2. Reef knot. Image from Wikipedia [Stolarsky 2013].

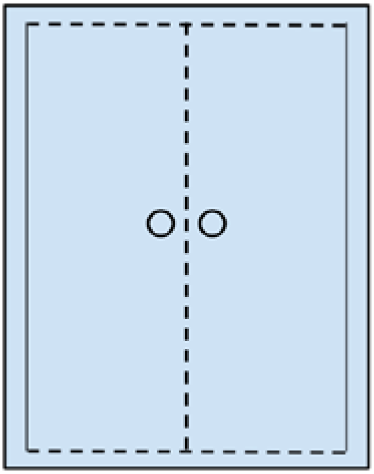

Figura 3. Disegno della porta.

Figure 3. Drawing of the door.

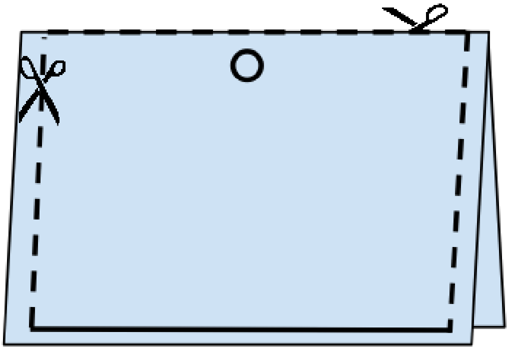

Figura 4. Primi tagli.

Figure 4. First cuts.

side". Dido could have demanded from Iarbas the entire Earth except for the piece surrounded by her rope! But it is unlikely that the king would have agreed.

The other element which no one ponders is: how long can a rope made from an oxhide be?

Since the laws of physics hold, the longest rope could be made of a polymer chain, of the hydrocarbon type or, perhaps, of a strand of DNA or a protein microtubule or a carbon nanotube. But I doubt that, 3000 years ago, technology was able to transform an oxhide in this way, in addition to the fact that these filaments are invisible and extremely fragile.

Thus, let us say that one has to cut the oxhide without physical or chemical transformations. To simplify, let us suppose that the skin covers 1 square meter (it would probably be closer to three or four, but only a factor changes), that it is perfectly two-dimensional (although in actual fact it has a certain thickness) and that it can be cut into 1 millimeter thick strips (which is no mean feat!). In this way one obtains 1,000 meters of cord, which, however, still has to be tied (1,000 knots!).

Using simple reef knots [Stolarsky 2013] (Fig. 2), I estimated that each knot uses a piece of cord more or less 10 times its diameter. This means that 10 meters of cord are lost, which doesn't seem a lot, but we have to consider that with 1,000 meters of rope only a circle of a radius of about 160 meters can be surrounded.

Can we save the knots? Yes, simply by changing the way the skin is cut. To demonstrate this in a practical way, let us challenge our friends to go through a door drawn on a small sheet of paper (Figure 3).

tratteggiate (senza tagliare completamente lungo la piegatura, occorre lasciare i due "battenti" della porta, Figura 4).

Riaprendo il foglio, la porta adesso si aprirà, ma sarà impossibile passare attraverso (Figura 5).

A questo punto basta ripiegare di nuovo il foglio e tagliare ulteriormente secondo le nuove linee tratteggiate nella Figura 6 (che partono alternativamente dalla piegatura e dal bordo).

Questa volta la porta si aprirà a zig-zag e si potrà allargare a sufficienza per passarci attraverso (Figura 7).

A proposito di allungare o accorciare una corda: supponiamo di avere una corda o una cintura lunga 44.000 km, ovvero quanto la circonferenza terrestre, e di metterla intorno all'equatore. Poi la allunghiamo di 1 metro, sempre tenendola di forma circolare. Di quanto si alzerà dalla superficie terrestre? 1 micron? 1 millimetro? di più? di meno?

Il rapporto tra circonferenza C e raggio R è $C=2\,\pi\,R$ ovvero $R=C/2\,\pi$. Aumentando C di 1 metro, R aumenta di 1/6,28 m ovvero di circa 16 cm!Risparmiando i nodi, Didone potrebbe aver allargato il suo cerchio di 1,6 m, il doppio per un semicerchio.

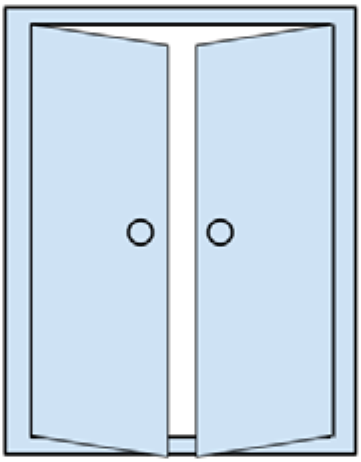

Figura 5. Porta aperta.
Figure 5. Open door.

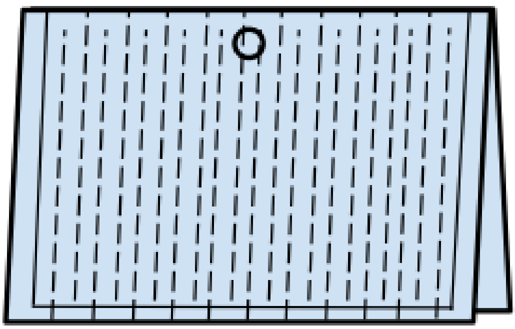

Figura 6. Secondo insieme di tagli.
Figure 6. Second set of cuts.

Bibliografia

[Kelvin 1894] W. Thomson (Baron Kelvin), Popular lectures and Addresses, Vol. II Geology and General Physics, Nature Series Macmillan and Co. (London 1894). http://math.arizona.edu/~dido/lord-kelvin1894.html ; http://www.math.uiuc.edu/~laugesen/dido-isoperimetry-history.pdf

[Magnani 2008] C. Magnani, The problem of Dido https://mathematicalgarden.wordpress.com/2008/12/21/the-problem-of-dido/ (2008)

[Stolarsky 2013] D. Stolarsky et al., Reef knot https://en.wikipedia.org/wiki/Reef_knot (2013)

[Virgilio 19 a.c.] Virgilio, Eneide, libro I, versi 365-369 (31-19 a.c.)

Franco Bagnoli (francobagnoli.complexworld.net) è un fisico teorico e lavora presso il Dipartimento di Fisica e Astronomia, Università di Firenze. Studia sistemi complessi nel campo della fisica, della biologia e delle scienze cognitive. È anche interessato alla divulgazione (vedi fisicax.complexworld.net) e alla comunicazione scientifica partecipativa, ed è il presidente dell'associazione Caffè-Scienza di Firenze (www.caffescienza.it).

Draw a double door on a 1/4 sheet of A4 paper and cut along the dashed lines. It is easier if you fold the paper in half and then cut along the dashed lines (do not completely cut along the fold, the two end portions have to be kept intact, (see Figure 4).

Unfold the sheet. The door may now be opened, but it is impossible to go through it (Figure 5).

At this point just fold up the sheet again and make further cuts following the new dashed lines shown in Figure 6 (these start alternately from the fold and from the edge).

This time the door will open along a zig-zag pattern and will expand sufficiently to pass through it (Figure 7).

Apropos lengthening or shortening a rope: suppose you have a belt 44,000 km long, i.e., as long as the circumference of the Earth, and you put it around the equator. Then lengthen it 1 meter, still maintaining a circular shape. How far will it rise from the earth's surface? 1 micron? 1 mm? more? less?

The ratio between the circumference C and radius R is $C = 2 \pi R$ or $R = C / 2 \pi$. Increasing C by 1 meter, R increases by 1 / 6.28 m or about 16 cm! By saving the knots, Dido could have expanded her circle by 1.6 m, twice that for a semi-circle.

References

[Kelvin 1894] W. Thomson (Baron Kelvin), Popular lectures and Addresses, Vol. II Geology and General Physics, Nature Series Macmillan and Co. (London 1894). http://math.ari-

Franco Bagnoli

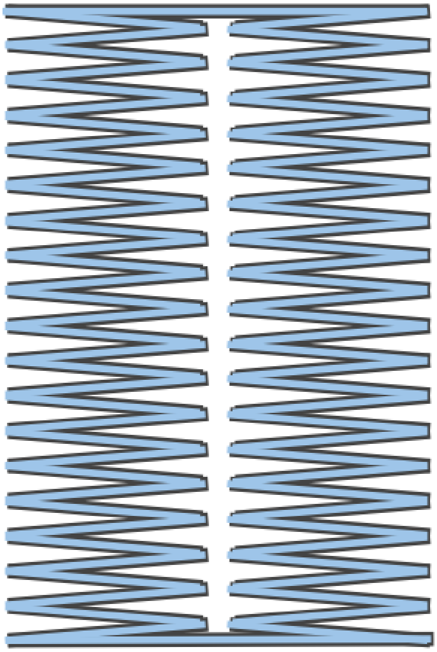

Figura 7. Apertura della “porta”.
Figure 7. Opening of the door.

zona.edu/~dido/lord-kelvin1894.html ; http://www.math.uiuc.edu/~laugesen/dido-isoperimetry-history.pdf
[Magnani 2008] C. Magnani, The problem of Dido https://mathematicalgarden.wordpress.com/2008/12/21/the-problem-of-dido/ (2008)
[Stolarsky 2013] D. Stolarsky et al., Reef knot https://en.wikipedia.org/wiki/Reef_knot (2013)
[Virgil19 a.c.] Virgil, Aeneid, book I, verses 365-369 (31-19 BC)

Franco Bagnoli (francobagnoli.complexworld.net) is a theoretical physicist working in the Department of Physics and Astronomy, University of Florence. He studies complex systems in physics, biology and cognitive sciences. He is also interested in science popularization (see fisicax.complexworld.net – in Italian) and science communication and participation, and is the president of the Florence Science Café association (www.caffescienza.it).